محاضره رياضة ٢

$$(x+iy)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)}$$

$$= r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)\right]$$

Ex find roots of $(Z+1)^7+Z^7=0$

Sol

$$(Z+1)^7=-Z^7 \Rightarrow \left(\frac{Z+1}{Z}\right)^7=-1$$

$$\frac{Z+1}{Z}=(-1)^{\frac{1}{7}} \quad ; \quad x=-1 \ , \ y=0$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=1$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right)=\pi$$

$$\frac{Z_K+1}{Z_K}=1^{\frac{1}{7}}\cdot e^{i\left(\frac{\pi+2K\pi}{7}\right)}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi+2K\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2K\pi}{7}\right)$$

$K = 0, 1, 2, \dots$

$$Z_{K+1} = Z_K \cdot e^{\left(\frac{\pi + 2K\pi}{7}\right)}$$

$$1 = Z_K \cdot e^{\left(\frac{\pi + 2K\pi}{7}\right)} - Z_K = \left(e^{\left(\frac{\pi + 2K\pi}{7}\right)} - 1\right) * Z_K$$

$$Z_K = \frac{1}{e^{\left(\frac{\pi + 2K\pi}{7}\right)} - 1}$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

$\boxed{1}$ مجموع الجذور : $\frac{a_{n-1}}{a_n}$

$\boxed{2}$ مجموع حاصل ضرب الجذور مثنى مثنى = $\frac{a_{n-2}}{a_n}$

⋮

$\boxed{3}$ حاصل ضرب الجذور = $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

$\boxed{EX}$ use $Z^n - 1 = 0$; $n = 2, 3, \dots$ to show:

$\boxed{1}$ $\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \dots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$

$\boxed{2}$ $\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \dots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$

$\boxed{2}$ Lec 2

$\boxed{3}$ $\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(\sin\frac{(n-1)}{n}\pi\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$

$\boxed{\text{solution}}$

$$Z^n-1=0 \Rightarrow Z=(1)^{\frac{1}{n}} \quad ; \; x=1,\; y=0,\; r=1,\; \theta=0$$

$$Z=r\,e^{i\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)}=e^{\left(\frac{2K\pi}{n}\right)i}$$

The roots $Z_K=e^{\frac{2K\pi}{n}i}$; $K=0,1,\cdots$; $n=1$

← مجموع الجذور = صفر (معامل $Z^{n-1}=0$)

$$Z_0+Z_1+Z_2+\cdots+Z_{n-1}=0$$

$$e^{0}+e^{\frac{2\pi i}{n}}+e^{\frac{4\pi i}{n}}+\cdots+e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i}=0$$

$$1+\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)+\left(\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}\right)$$

$$+\left[\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]=0$$

← نساوي الحقيقي بالحقيقي

$$1+\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\frac{2(n-1)}{n}\pi=0$$

$$\therefore \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) \dots = -1$$

ـــ نساوى التخيلى بالتخيلى

$$\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

Curves and rigion on Complex Plan

ـــ المنحنيات والمناطق فى مستوى الأعداد المركبة.

[1] $|Z - Z_0| = C$

ـــ المحل الهندسى لجميع النقط التى تتحرك فى (Z-plane)
بحيث أن بعدها عن نقطة ثابتة يساوى مقدار ثابت.

Notes $Z = x + iy \; ; \; Z_0 = x_0 + iy_0$

$$|Z - Z_0| = |(x - x_0) + i(y - y_0)| = C$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = C$$

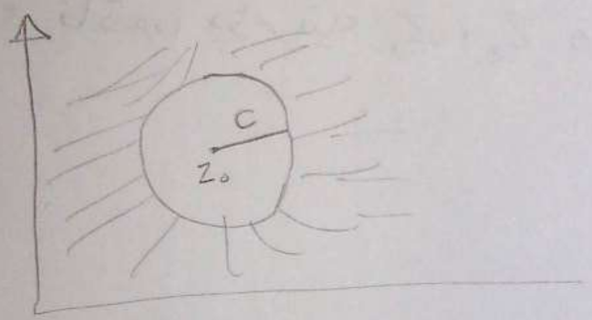
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = C$$

ـــ دائرة مركزها (x_0, y_0)
ونصف قطرها (C)

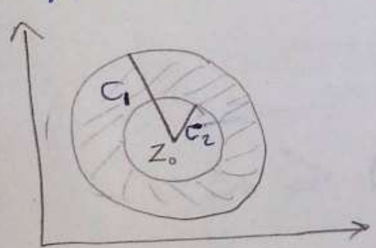
$\boxed{2}$ $|Z - Z_0| \leqslant c$

ـــ المنطقة داخل الدائرة التى مركزها (Z_0)
و نصف قطرها C .

$\boxed{3}$ $|Z - Z_0| > c$ $\Longrightarrow$ المنطقة خارج الدائرة



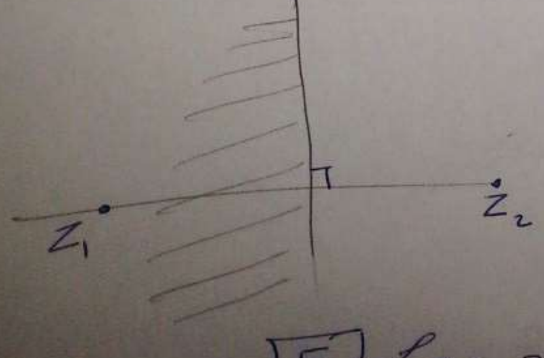
$\boxed{4}$ $c_2 \leqslant |Z - Z_0| \leqslant c_1$ (annuluc حلقة)



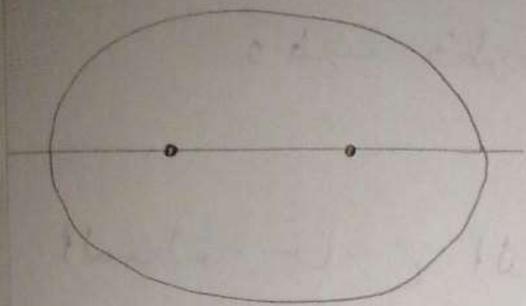
$\boxed{5}$ $|Z - Z_1| \leqslant |Z - Z_2|$

ـــ المحل الهندسى لجميع النقاط التى تتحرك بحيث بعدها عن Z_1
أقل من أو يساوى بعدها عن Z_2
(خلينا الأول فى حالة التساوى)

* الشكل الناتج خط عمودى على
المسافة و التهشير يكون فى المنطقة
التى يقع فيها Z_1 .



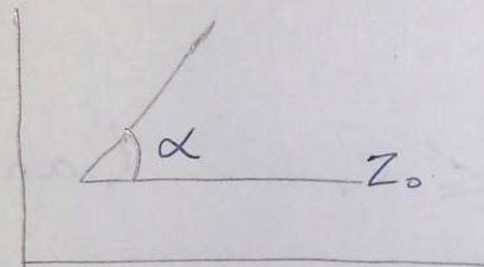
$\boxed{6}$ $|Z - Z_1| + |Z - Z_2| = c$



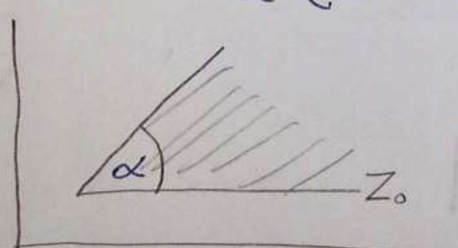
* نلاحظ أن هذه المعادلة تعطى المحل الهندسى لجميع النقط التى مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوى مقدار ثابت.

* قطع ناقص بؤرتيه Z_1 ، Z_2 وطول محوره الأكبر c.

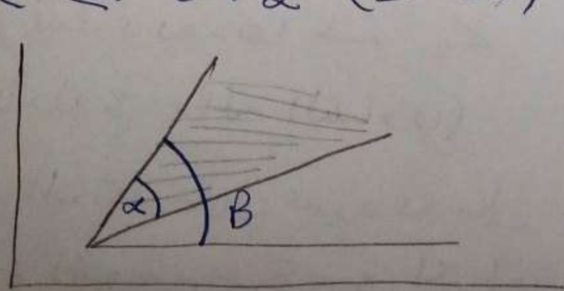
$\boxed{7}$ $\arg(Z - Z_0) = \alpha$



$\boxed{8}$ $0 \leq \arg(Z - Z_0) \leq \alpha$



$\boxed{9}$ $\alpha \leq \arg(Z - Z_0) \leq B$



$\boxed{Ex}$ Find curves and regions graphically:-

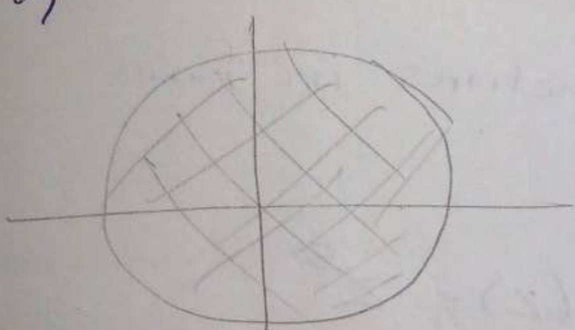
a) $|z-i| < 2$

b) $|z-i| + |z+i| = 4$

c) $|\arg(z+3i)^3| \leq \pi$

$\boxed{Sol}$

a)

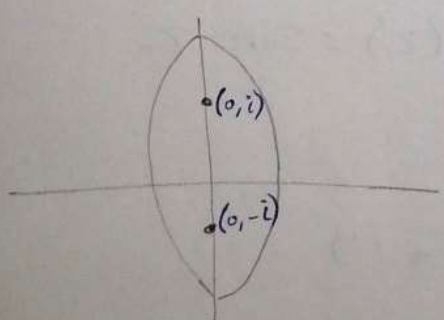


$x_0 = 0$

$y_0 = 1$ ⇐ i دائرة مركزها

ونصف قطرها 2 والتهشير داخل الدائرة

b)



قطع ناقص بؤرتيه

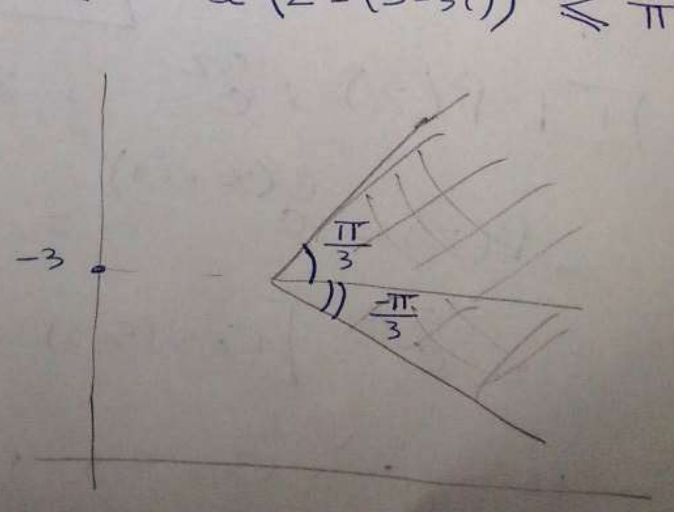
$z_1 = i$ ، $z_2 = -i$

وطول محور الأكبر 4 .

c)

$$-\pi \leq \arg(z-(5-3i))^3 \leq \pi$$

$$-\pi \leq 3\arg(z-(5-3i)) \leq \pi$$



The Complex Functions

← حيث أنه الأعداد المركبة يمكن أن تكتب بطريقتين

$Z = re^{i\theta}$ ، $Z = x + iy$ وكلاهما عند الفك لا يحتوى

على جزء حقيقي وجزء تخيلي عند الفك جميع الدوال عدا

($\ln z$ ، z^{72} رقم) نستبدل z بإحدى قيمها.

$\boxed{Ex}$ Put the following functions in form

$f(z) = u + iv$

$\boxed{1}$ $f(z) = e^{5z}$ ، ② $f(z) = z^5$

$\boxed{3}$ $f(z) = \ln z$ $\boxed{4}$ $f(z) = \sin z$

$\boxed{Sol}$

$\boxed{1}$ $f(z) = e^{5z}$; $z = x + iy$

$\therefore f(z) = e^{5(x+iy)} = e^{5x} \cdot e^{i5y}$

$= e^{5x} \cdot [\cos(5y) + i\sin(5y)]$

$u = e^{5x} \cdot \cos 5y$ ، $v = e^{5x} \cdot \sin(5y)$

② $f(z) = z^5 = (r e^{i\theta})^5 = r^5 [\cos(5\theta) + i \sin(5\theta)]$

$u = r^5 \cos(5\theta)$

$v = r^5 \cdot \sin(5\theta)$

* لو عوضت عن $(Z = x + iy)$ صح
لكن طويلة هتتعفك بذات العدين.
$(x + iy)^5$

$\boxed{3}$ $f(z) = \ln(z) \quad ; Z = r e^{i(\theta \pm 2\pi K)}$

$f(z) = \ln\left(r e^{i(\theta \pm 2\pi K)}\right) = \ln r + \ln e^{i(\theta \pm 2\pi K)}$

$= \ln r + i(\theta \pm 2\pi K)$

at $K = 0$; the value is Principal value.

$\boxed{4}$ $f(z) = \sin z \quad ; Z = x + iy$

$= \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$

* الـ Cos زى ما بتأكل الإشارة بتأكل الـ i وتقلب.
لـ (Cosh) والـ (Sin) زى ما بتطلع الإشارة بتطلع
i وتقلب إلى (sinh)

$\therefore \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

$u = \sin x \cdot \cosh y \quad , \quad v = \cos x \sinh y$

Some Notes

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

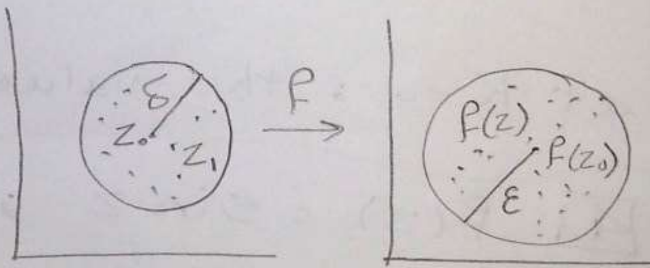
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$\cos iz = \cosh z \quad , \quad \sin iz = i \sinh z$

$\cosh iz = \cos z \quad , \quad \sinh iz = i \sin z$

The Continuity of Complex fn

→ given $\varepsilon > 0$ there is exist $\delta > 0$ such that if $|z - z_0| < \delta$ then



$|z - z_0| < \delta \qquad |f(z) - f(z_0)| = \varepsilon$

~~f(z - z₀)~~

$$\boxed{|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon}$$

الدالة تكون متصلة عند نقطة إذا تحققت الشروط الآتية:

١- الدالة معرفة عند z_0 .

٢- النهاية موجودة عند z_0.

$\lim_{z \to z_0} f(z_0)$ is exist

٣- النهاية = قيمة التعريف.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$